文章编号: 1001-4543(2024)04-0424-06 DOI: 10.19570/j.cnki.jsspu.2024.04.010

二维指数分布场合相依部件系统的贝叶斯分析

武 东[1], 李 琼[2]

(1. 安徽农业大学 信息与人工智能学院, 安徽 合肥 230036;
2. 徽商职业学院 电子信息系, 安徽 合肥 231201)

摘 要: 对两部件寿命服从 Marshall-Olkin 指数分布的串联系统和并联系统的可靠度进行了贝叶斯 (Bayesian, Bayes) 统计分析。在平方误差损失下, 利用混合 Metropolis-吉布斯抽样法给出了系统可靠度的 Bayes 估计。最后, 通过模拟研究表明在串联系统和并联系统的可靠度估计中, Bayes 估计要优于极大似然估计。

关键词: 二维指数分布; 串联系统; 并联系统; 贝叶斯估计
中图分类号: O213.2 **文献标志码**: A

Bayesian Analysis of the Dependent Component System Based on Bivariate Exponential Distribution

WU Dong[1], LI Qiong[2]

(1. School of Information and Artificial Intelligence, Anhui Agricultural University, Hefei 230036, Anhui, China;
2. Department of Electronic Information, Huishang Vocational College, Hefei 231201, Anhui, China)

Abstract: A Bayesian (Bayes) procedure is presented for estimating the reliability of series system and parallel systems with two component lifetimes under Marshall-Olkin Exponential distribution. Under square error loss, Bayes estimation of the system reliability was proposed by mixed Metropolis-Gibbs sampling methods. Finally, through simulation studies, Bayes estimation for reliability of the series system and parallel systems is better than maximum likelihood estimation.

Keywords: Bivariate Exponential distribution; series system; parallel system; Bayesian estimation

0 引言

众所周知, 指数分布在统计学中的地位举足轻重, 由指数分布可以衍生得到二维指数分布 [1]。二维指数分布源于热力学的玻尔兹曼分布, 可以描述气体分子速度分布。目前, 二元指数分布广泛应用于可靠性工程、生物统计学、物理学、工程学、金融、环境科学、地理学和信号处理等领域。

针对二维指数分布的统计分析、推广和应用层出不穷, 周菊玲等 [2] 通过 Marshall-Olkin 二维指数分布模型推导出它的边际密度函数, 从而得到参数相关的协方差以及 Marshall-Olkin 二维指数分布模型的相关性质。彭江艳等 [3] 运用 Marshall-Olkin 二维指数分布构造方法推导了多维指数分布。李国安 [4] 进一步研究了多元 Marshall-Olkin 型指数分布的特征并给出参数的极大似然估计和矩估计。关于多元指数分布的推广有: 多元 Freund 型指

收稿日期: 2024-02-03
通信作者: 武 东 (1976–), 男, 安徽六安人, 副教授, 硕士, 主要研究方向为可靠性统计和时间序列分析。
E-mail: wudong@ahau.edu.cn
基金项目: 安徽省高校自然科学研究重点项目 (2023AH053108), 安徽省质量工程项目 (2022zygzsj056), 安徽农业大学质量工程项目 (2021auxsxxkc1) 资助

数分布 [5]、多元 Friday-Patil 型指数分布 [6] 和多元 Proschan-Sullo 型指数分布 [7]。在可靠性统计领域中, 安宗文等 [8] 利用二维指数条件分布的定义和特性推导出一种 BEC 加速寿命模型。管强等 [9] 研究了 Marshall-Olkin 指数分布步进应力加速寿命试验中定数截尾的最优设计问题。

在系统可靠性分析中, 程侃 [10] 研究了可修系统下两相依部件的系统可靠性分析。关于 Copula 函数在可靠性中的应用研究, 李霞 [11] 研究了两部件寿命相依关系分析。钟波等 [12] 研究了部件相依并联系统的可靠性分析。姜琦 [13] 研究了部件相依串联系统的可靠性分析。易文德等 [14] 研究了相依部件表决系统的可靠性分析。蔡静等 [15] 研究了屏蔽数据并-串联系统的可靠性分析。

上述文献研究的问题主要集中在二维指数分布及多元指数分布的参数估计及其在可靠性中的应用, 但是均未研究利用基于混合 Metropolis-吉布斯抽样法 [16] 的贝叶斯 (Bayesian, Bayes) 分析方法研究相依部件的可靠性估计。鉴于此, 本文试解决这个问题。本文余下内容安排如下: ① 二维指数分布, 主要介绍二维指数分布及其密度函数; ② 在平方损失函数下, 讨论二维指数分布的 Bayes 估计; ③ 基于 Bayes 方法给出二维分布的串联、并联系统的可靠性估计计算公式; ④ 利用 Monte Carlo 方法研究相依部件系统的可靠度估计, 比较极大似然估计法和 Bayes 估计所得出的系统可靠度估计的差异。

1　二维指数分布

Marshall 等 [17] 于 1967 年构建了二维指数分布, 其表述如下: 令 U_1、U_2、U_3 是相互独立的随机变量, 且

$$U_1 \sim \mathrm{E}(\lambda_1), \quad U_2 \sim \mathrm{E}(\lambda_2), \quad U_3 \sim \mathrm{E}(\lambda_3)$$

式中, $\mathrm{E}(\lambda)$ 表示失效率为 λ 的指数分布, 其密度函数和可靠度函数分别为: $f_E(x;\lambda) = \lambda\exp(-\lambda x)$, $x > 0$; $R_E(x;\lambda) = \exp(-\lambda x)$, $x > 0$。

若定义 $X = \min\{U_1, U_3\}$ 和 $Y = \min\{U_2, U_3\}$, 则称 (X, Y) 服从二维指数分布, 记为 $(X, Y) \sim \mathrm{MOBE}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$, 其可靠度函数为

$$R_{(X,Y)}(x, y) = \exp\{-\lambda_1 x - \lambda_2 y - \lambda_3 \max(x, y)\},\quad x > 0, \quad y > 0 \tag{1}$$

二维指数分布的联合密度函数为

$$f_{(X,Y)}(x,y) = \begin{cases} f_E(x;\lambda_1) f_E(y;\lambda_2+\lambda_3), & x < y \\ f_E(x;\lambda_1+\lambda_3) f_E(y;\lambda_2), & x > y \\ \dfrac{\lambda_3 f_E(x;\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)}{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3}, & x = y \end{cases} \tag{2}$$

2　极大似然估计

假设电子产品是由部件 1 和部件 2 组合而成, 两个部件的寿命 (X, Y) 服从二维指数分布 $\mathrm{MOBE}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$, 现从该电子产品抽取 n 个进行寿命试验, 得到样本数据为

$$D = \{(x_1, y_1), (x_2, y_2), \cdots, (x_n, y_n)\}$$

记 $T_1 = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i, T_2 = \sum\limits_{i=1}^{n} y_i, T_3 = \sum\limits_{i=1}^{n} \max(x_i, y_i)$, 可得基于上述数据的似然函数为

$$L(D|\theta) = \lambda_1^{n_1}\lambda_2^{n_2}\lambda_3^{n_3}(\lambda_2+\lambda_3)^{n_1}(\lambda_1+\lambda_3)^{n_2} \exp\{-\lambda_1 T_1 - \lambda_2 T_2 - \lambda_3 T_3\} \tag{3}$$

式中: n_1 表示部件 1 先于部件 2 失效的个数; n_2 表示部件 2 先于部件 1 失效的个数; n_3 表示两部件同时失效的个数。

相应的对数似然函数为

$$\begin{aligned} \ln L = {} & n_1 \ln\lambda_1 + n_2\ln\lambda_2 + n_3\ln\lambda_3 + \\ & n_1\ln(\lambda_2+\lambda_3) + n_2\ln(\lambda_1+\lambda_3) - \\ & \lambda_1 T_1 - \lambda_2 T_2 - \lambda_3 T_3 \end{aligned} \tag{4}$$

对对数似然函数关于参数求偏导数, 得到下述正规方程组:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \ln L}{\partial\lambda_1} &= \frac{n_1}{\lambda_1} + \frac{n_2}{\lambda_3+\lambda_1} - T_1 = 0 \\ \frac{\partial \ln L}{\partial\lambda_2} &= \frac{n_2}{\lambda_2} + \frac{n_1}{\lambda_3+\lambda_2} - T_2 = 0 \\ \frac{\partial \ln L}{\partial\lambda_3} &= \frac{n_3}{\lambda_3} + \frac{n_2}{\lambda_3+\lambda_1} + \\ & \quad \frac{n_1}{\lambda_3+\lambda_2} - T_3 = 0 \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

采用牛顿迭代法, 可以得到未知参数的极大似然估计。

3　Bayes 可靠度估计

假设考虑到伽玛分布具有很强的稳健性和兼容性, 假设 λ_i 的先验分布服从伽玛分布 $\mathrm{Gamma}(a_i, b)$,

其概率密度为

$$\pi_i(\lambda_i|a_i,b)=\frac{b^{a_i}}{\Gamma(a_i)}\lambda_i^{a_i-1}\exp(-b\lambda_i) \tag{6}$$

$$\lambda_i>0,\quad i=0,1,2$$

式中, $\Gamma(x)=\int_0^{+\infty}t^{x-1}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$, $x>0$ 和 $a_i>0$, $b>0, i=1,2,3$ 为超参数。

因而, $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)$ 的联合先验分布为

$$\begin{aligned}&\pi(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3|a_1,a_2,a_3,b)=\\&\prod_{i=1}^{3}\frac{b^{a_i}}{\Gamma(a_i)}\lambda_i^{a_i-1}\exp(-b\lambda_i)\\&(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)\in H\end{aligned} \tag{7}$$

式中, $H=\{(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)|\lambda_i>0,i=1,2,3\}$ 为参数空间。

根据 Bayes 定理, 利用似然函数式 (2) 和先验分布式 (7), 得到 $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)$ 的联合后验分布为

$$\begin{aligned}&\pi(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3|D)\propto\\&L(D|\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)\pi(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3|a_1,a_2,a_3,b)=\\&\lambda_1^{n_1+a_1-1}\lambda_2^{n_2+a_2-1}\lambda_3^{n_3+a_3-1}(\lambda_2+\lambda_3)^{n_1}(\lambda_1+\lambda_3)^{n_2}\times\\&\exp\{-(\lambda_1+b)T_1-(\lambda_2+b)T_2-(\lambda_3+b)T_3\}\propto\\&(\lambda_2+\lambda_3)^{n_1}(\lambda_1+\lambda_3)^{n_2}\mathrm{Gamma}(n_1+a_1,b+T_1)\times\\&\mathrm{Gamma}(n_2+a_2,b+T_2)\mathrm{Gamma}(n_3+\\&a_3,b+T_3)\end{aligned} \tag{8}$$

在平方损失函数下, 待估函数 $g(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)$ 的 Bayes 估计为

$$\begin{aligned}&\hat{g}(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)=\\&\frac{\iiint g(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)\pi(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3|D)\mathrm{d}\lambda_1\mathrm{d}\lambda_2\mathrm{d}\lambda_3}{\iiint \pi(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3|D)\mathrm{d}\lambda_1\mathrm{d}\lambda_2\mathrm{d}\lambda_3}\end{aligned} \tag{9}$$

如果一个元件由两个相依部件组合而成, 两个部件的寿命服从二维指数分布, 下面对串联系统和并联系统两种常见的系统进行可靠度分析。

如果两部件的组合是串联而成, 此时系统的寿命 $Z=\min(X,Y)$, 系统的可靠度函数

$$\begin{aligned}&R_1(t,\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)=P(\min(X,Y)>t)=\\&\exp\{-(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)t\},\quad t>0\end{aligned} \tag{10}$$

如果系统由两个部件并联而成, 其寿命服从二维指数分布。两部件的寿命 X 和 Y 的边际可靠度函数分别为: $P(X>t)=\exp\{-(\lambda_1+\lambda_3)t\}, t>0$; $P(Y>t)=\exp\{-(\lambda_2+\lambda_3)t\}, t>0$。

此时, 系统的寿命 $Z=\max(X,Y)$, 系统的可靠度函数为

$$\begin{aligned}&R_2(t,\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)=P(\max(X,Y)>t)=\\&P(X>t)+P(Y>t)-P(X>t,Y>t)=\\&\exp\{-(\lambda_1+\lambda_3)t\}+\exp\{-(\lambda_2+\lambda_3)t\}-\\&\exp\{-(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)t\},\quad t>0\end{aligned} \tag{11}$$

利用式 (9), 可以估计出串联系统和并联系统的可靠度函数。下面采用混合 Metropolis-吉布斯抽样法对可靠度进行估计, 具体操作步骤如下:

步骤 1 从伽玛分布 $\mathrm{Gamma}(n_i+a_i,b+T_i)$ 产生初始值 $\lambda_i^{(0)}$, $i=1,2,3$, 记为 $\Lambda^{(0)}=(\lambda_1^{(0)},\lambda_2^{(0)},\lambda_3^{(0)})$。

给定 $\Lambda^{(t)}=(\lambda_1^{(t)},\lambda_2^{(t)},\lambda_3^{(t)})$, 下面算法可产生 $\Lambda^{(t+1)}=(\lambda_1^{(t+1)},\lambda_2^{(t+1)},\lambda_3^{(t+1)})$。

步骤 2 将先验分布作为提案分布, 从 $\mathrm{Gamma}(n_1+a_1,b+T_1)$ 产生备选点 λ_1^*, 计算 Metropolis-Hastings 比率 $R_1=\frac{(\lambda_1^*+\lambda_3^{(t)})^{n_2}}{(\lambda_1^{(t)}+\lambda_3^{(t)})^{n_2}}$, 根据式 (12) 抽取

$$\lambda_1^{(t+1)}=\begin{cases}\lambda_1^*, & \text{以概率 } \min\{1,R_1\},\\ \lambda_1^{(t)}, & \text{否则。}\end{cases} \tag{12}$$

从 $\mathrm{Gamma}(n_2+a_2,b+T_2)$ 产生备选点 λ_2^*, 计算 Metropolis-Hastings 比率 $R_2=\frac{(\lambda_2^*+\lambda_3^{(t)})^{n_1}}{(\lambda_2^{(t+1)}+\lambda_3^{(t)})^{n_1}}$, 根据式 (13) 抽取

$$\lambda_2^{(t+1)}=\begin{cases}\lambda_2^*, & \text{以概率 } \min\{1,R_2\},\\ \lambda_2^{(t)}, & \text{否则。}\end{cases} \tag{13}$$

从 $\mathrm{Gamma}(n_3+a_3,b+T_3)$ 产生备选点 λ_3^*, 计算 Metropolis-Hastings 比率 $R_3=\frac{(\lambda_1^{(t+1)}+\lambda_3^*)^{n_2}(\lambda_2^{(t+1)}+\lambda_3^*)^{n_1}}{(\lambda_1^{(t+1)}+\lambda_3^{(t)})^{n_2}(\lambda_2^{(t+1)}+\lambda_3^{(t)})^{n_1}}$, 根据式 (14) 抽取

$$\lambda_3^{(t+1)}=\begin{cases}\lambda_3^*, & \text{以概率 } \min\{1,R_3\},\\ \lambda_3^{(t)}, & \text{否则。}\end{cases} \tag{14}$$

步骤 3 增加 t, 返回步骤 2。

令 $t=1,2,\cdots,M$, 可以得到一组混合 Metropolis-吉布斯抽样链, 舍弃掉前 $N(N<M)$ 迭代样本值, 利用预烧后的 $M-N$ 个迭代值可计算出串联系统的可靠度 $R_1(t,\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)$ 和并联系统的

可靠度 $R_2(t,\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)$, 它们的估计值分别为

$$\hat{R}_i(t,\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)=\frac{1}{M-N}\sum_{l=N+1}^{M}R_i(t,\lambda_1^{(l)},\lambda_2^{(l)},\lambda_3^{(l)}),\quad i=1,2 \quad (15)$$

4　模拟研究

上述方法能够获得二维指数分布场合串联系统和并联系统的可靠度估计。利用蒙特卡模拟方法产生几组样本, 利用本文提出的方法研究其可靠度估计及精度。现在考虑参数 $\lambda_1=0.02$、$\lambda_2=0.03$ 和 $\lambda_3=0.01$ 的二维指数分布。当 $t=10,20,\cdots,50$ 时, 利用式 (10) 和式 (11) 容易计算出二维指数分布相依部件的串联和并联系统的真实可靠度依次为

$$R_1(10)=0.548\,8,\quad R_1(20)=0.301\,2$$
$$R_1(30)=0.165\,3,\quad R_1(40)=0.090\,7$$
$$R_1(50)=0.049\,8,\quad R_2(10)=0.857\,3$$
$$R_2(20)=0.476\,7,\quad R_2(30)=0.287\,0$$
$$R_2(40)=0.182\,1,\quad R_2(50)=0.119\,4$$

现从上述二维指数分布产生样本容量 n 分别为 10, 20, 30, 40, 50, 60 的 100 组样本。利用极大似然估计和 Bayes 估计对上述系统的可靠度进行估计并比较精度。极大似然估计采用 Newton 迭代法, 迭代初值 $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=10^{-3}$, 迭代精度为 10^{-6}。Bayes 估计的先验超参数取为 $a_1=10n$, $a_2=15n$, $a_3=5n$, $b=500n$, n 为样本容量。再利用重要抽样法进行可靠度的估计, 式 (15) 的迭代值个数 $M=5\,000$, 舍弃迭代值个数 $N=1\,000$。

利用本文所提的 Bayes 估计方法对产生的样本进行可靠性评估, 具体结果如表 1～表 4 所示。

表 1　串联系统可靠度的均值估计

Tab. 1　Mean estimation of reliability for series systems

n	$\hat{R}_1(10)$		$\hat{R}_1(20)$		$\hat{R}_1(30)$		$\hat{R}_1(40)$		$\hat{R}_1(50)$	
	MLE	Bayes	MLE	Bayes	MLE	Bayes	MLE	Bayes	MLE	Bayes
10	0.501 5	0.550 7	0.289 9	0.303 3	0.138 3	0.167 0	0.075 2	0.092 0	0.041 7	0.050 7
20	0.540 2	0.550 3	0.295 4	0.304 0	0.163 3	0.167 6	0.091 3	0.092 4	0.051 5	0.050 9
30	0.538 4	0.551 2	0.292 6	0.303 8	0.160 5	0.167 4	0.088 8	0.092 3	0.049 5	0.050 9
40	0.544 0	0.551 4	0.297 6	0.304 0	0.163 8	0.167 6	0.090 7	0.092 4	0.050 5	0.051 0
50	0.544 6	0.551 4	0.297 9	0.304 1	0.163 7	0.167 7	0.090 3	0.092 5	0.050 1	0.051 0
60	0.544 3	0.551 3	0.297 1	0.303 9	0.162 6	0.167 6	0.089 2	0.092 4	0.049 1	0.050 9

表 2　串联系统可靠度估计的平均绝对偏差

Tab. 2　Mean absolute deviation of reliability estimation for series systems

n	$\hat{R}_1(10)$		$\hat{R}_1(20)$		$\hat{R}_1(30)$		$\hat{R}_1(40)$		$\hat{R}_1(50)$	
	MLE	Bayes	MLE	Bayes	MLE	Bayes	MLE	Bayes	MLE	Bayes
10	0.078 5	0.003 4	0.078 1	0.003 8	0.059 5	0.003 1	0.041 1	0.002 3	0.027 4	0.001 6
20	0.048 0	0.003 2	0.050 8	0.003 5	0.040 7	0.002 9	0.029 2	0.002 1	0.019 8	0.001 5
30	0.043 3	0.002 9	0.046 4	0.003 2	0.037 5	0.002 6	0.027 1	0.001 9	0.018 4	0.001 3
40	0.033 9	0.002 9	0.036 9	0.003 2	0.030 2	0.002 6	0.022 0	0.001 9	0.015 1	0.001 3
50	0.028 9	0.002 7	0.031 5	0.003 0	0.025 9	0.002 5	0.019 0	0.001 8	0.013 0	0.001 3
60	0.022 8	0.002 5	0.024 8	0.002 8	0.020 3	0.002 3	0.014 8	0.001 7	0.010 1	0.001 2

表 3 并联系统可靠度的均值估计

Tab. 3 Mean estimation of reliability for parallel systems

n	$\hat{R}_2(10)$		$\hat{R}_2(20)$		$\hat{R}_2(30)$		$\hat{R}_2(40)$		$\hat{R}_2(50)$	
	MLE	Bayes	MLE	Bayes	MLE	Bayes	MLE	Bayes	MLE	Bayes
10	0.863 9	0.864 6	0.523 8	0.483 7	0.345 7	0.292 5	0.240 1	0.186 3	0.172 3	0.122 5
20	0.847 4	0.865 7	0.476 2	0.484 9	0.292 7	0.293 5	0.190 7	0.187 1	0.128 9	0.123 1
30	0.838 5	0.865 7	0.463 8	0.484 8	0.280 0	0.293 4	0.179 1	0.187 0	0.111 8	0.123 0
40	0.847 3	0.866 1	0.469 5	0.485 0	0.282 7	0.293 5	0.179 9	0.187 0	0.118 6	0.123 0
50	0.857 4	0.866 4	0.479 9	0.485 5	0.291 6	0.293 9	0.187 0	0.187 4	0.124 1	0.123 3
60	0.848 9	0.865 9	0.470 4	0.484 9	0.283 1	0.293 4	0.180 0	0.187 0	0.118 4	0.123 0

表 4 并联系统可靠度估计的绝对偏差

Tab. 4 Mean absolute deviation of reliability estimation for parallel systems

n	$\hat{R}_2(10)$		$\hat{R}_2(20)$		$\hat{R}_2(30)$		$\hat{R}_2(40)$		$\hat{R}_2(50)$	
	MLE	Bayes	MLE	Bayes	MLE	Bayes	MLE	Bayes	MLE	Bayes
10	0.226 3	0.008 7	0.214 3	0.008 4	0.177 7	0.006 8	0.143 3	0.005 2	0.114 2	0.004 0
20	0.092 7	0.008 5	0.091 2	0.008 3	0.078 0	0.006 6	0.063 6	0.005 1	0.050 9	0.003 8
30	0.074 9	0.008 5	0.073 7	0.008 2	0.061 7	0.006 5	0.049 5	0.004 9	0.039 0	0.003 7
40	0.060 4	0.008 8	0.059 3	0.008 4	0.049 6	0.006 6	0.040 0	0.004 9	0.031 7	0.003 7
50	0.054 5	0.009 2	0.055 5	0.008 8	0.046 8	0.006 9	0.037 6	0.005 2	0.029 7	0.003 9
60	0.047 6	0.008 6	0.048 3	0.008 2	0.041 1	0.006 5	0.033 5	0.004 8	0.026 6	0.003 6

表 1 和表 2 分别给出了二维指数分布场合相依部件串联系统的可靠度估计值和平均绝对偏差, 平均绝对偏差为

$$\mathrm{MAE}=\frac{1}{100}\sum_{i=1}^{100}|\theta-\hat{\theta}_i| \tag{16}$$

式中, $\hat{\theta}_i$ 表示真值 θ 的第 i 个估计值。

表中 MLE 表示利用极大似然估计获得的相应结果, Bayes 表示利用 Bayes 估计获得的相应结果。由此可得出: 两种估计方法都是有效的, 但 Bayes 估计的绝对偏差相对较小, 更接近真值, 从而 Bayes 估计优于极大似然估计。

由表 3 和表 4 分别给出了二维指数分布场合相依部件并联系统的可靠度估计值和平均绝对偏差, 容易得出: 两种估计均是有效的, 但是 Bayes 估计更加高效, 因为 Bayes 估计的均值和绝对偏差均较小, 特别是 Bayes 估计的绝对偏差非常稳定, 而极大似然估计的绝对偏差随着样本容量和使用时间有较大波动。

5 结 语

本文主要采用混合 Metropolis-吉布斯抽样法对二维指数分布场合相依部件的系统可靠性进行了 Bayes 分析。混合 Metropolis-吉布斯抽样法是一种将吉布斯抽样与 Metropolis-Hastings 抽样进行融合的算法。在模拟研究中, 值得进一步商榷和研究有以下几点: ① 模拟分析中进行极大似然估计时, 偶尔会出现海赛矩阵奇异, 从而导致逆矩阵不存在, 因此, 在计算采用了广义逆矩阵解决奇异阵求逆问题; ② 在 Bayes 分析中, 超参数的取值通常会影响估计效果, 如果采用无信息先验的话, Bayes 估计与极大似然估计基本无差别, 在实用中, 能结合工程背景或专家意见, 选取恰当的先验至关重要; ③ 在进行

Metropolis-Hastings 抽样时, 选取参数的先验分布作为提案分布, 提案分布的选取值得研究, 抽样采用了 Metropolis-Hastings 独立链抽样方法, 其比率等于似然比, 独立链的平稳分布就是所需要的后验分布。由此可见, 使用混合 Metropolis-吉布斯抽样进行 Bayes 估计时避免了高维积分的计算, 更加简便实用。

本文仅对二维指数分布场合相依部件系统可靠性评估进行了统计研究, 而利用 Bayes 方法对多元指数分布场合相依部件系统可靠性评估展开研究, 其前景和意义十分重大。

参考文献:

[1] 习丽, 刘瑞元. 二维指数分布 [J]. 青海大学学报 (自然科学版), 2007, 25(2): 86-88.

[2] 周菊玲, 梁晓佳. Marshall-Olkin 二元指数分布 [J]. 新疆师范大学学报 (自然科学版), 2013, 32(4): 63-65.

[3] 彭江艳, 何平. 多维指数分布模型 [J]. 数学的实践与认识, 2004, 34(7): 102-106.

[4] 李国安. 多元 Marshall-0lkin 型指数分布的特征及其参数估计 [J]. 工程数学学报, 2005, 22(6): 1055-1062.

[5] 李国安. 多元 Freund 型指数分布的特征及参数估计 [J]. 宁波大学学报 (理工版), 2006, 19(1): 9-13.

[6] 陆吉杭, 李国安. 多元 Friday-Patil 型指数分布的特征及参数估计 [J]. 宁波大学学报 (理工版), 2011, 24(4): 72-78.

[7] 李国安, 李建峰. 多元 Proschan-Sullo 型指数分布的特征及参数估计 [J]. 宁波大学学报 (理工版), 2019, 32(5): 100-103.

[8] 安宗文, 黄洪钟, 王贵宝. 基于二维指数条件分布的加速寿命模型 [J]. 电子科技大学学报, 2009, 38(3): 455-458.

[9] 管强, 程依明. 多元指数分布定数截尾步进应力加速寿命试验的优化设计 [J]. 应用数学学报, 2010, 33(3): 452-465.

[10] 程侃. 两相依部件的系统可靠性分析 [J]. 数学进展, 1982, 3: 206-215.

[11] 李霞. 基于 Copula 函数的两部件寿命相依关系分析 [J]. 统计与决策, 2014, 17: 76-78.

[12] 钟波, 孙永波. 基于 Copula 的部件相依并联系统可靠性分析 [J]. 数理统计与管理, 2011, 30(2): 363-369.

[13] 姜琦. 基于 Copula 函数相依串联系统的可靠性分析 [J]. 电子质量, 2011, 9: 17-19.

[14] 易文德, 卫贵武. 基于 Copula 函数的相依部件表决系统的可靠性研究 (英文)[J]. 西南师范大学学报 (自然科学版), 2007, 32(6): 52-55.

[15] 蔡静, 师义民, 白旭超. 基于 Copula 函数的屏蔽数据并-串联系统可靠性分析 [J]. 数学的实践与认识, 2018, 48(17): 162-168.

[16] 王兆军等译. 计算统计 [M]. 北京: 人民邮电出版社, 2009.

[17] MARSHALL A W, OLKIN I. A multivariate exponential distribution [J]. Journal of the American Statistical Association, 1967, 62(1): 30-44.