文章编号: 1001-4543(2017)04-0291-04 DOI: 10.19570/j.cnki.jsspu.2017.04.007

广义变分不等式组和非扩张映射对的 Wiener-Hopf 方程技巧

邱洋青

(上海第二工业大学理学院, 上海 201209)

摘　要: 将含松弛共强制映射的广义变分不等式组和非扩张映射对转化为广义非线性 Wiener-Hopf 方程组, 构造新的迭代算法, 证明广义变分不等式组解集和非扩张映射对积集公共解的存在性及迭代序列的强收敛性。

关键词: Wiener-Hopf 方程技巧; 松弛共强制映射; 迭代算法; 非扩张映射

中图分类号: O 177.91 **文献标志码**: A

0 引言

将变分不等式转化为算子方程, 最终化为不动点问题, 是求解变分不等式普遍使用的方法, 其中之一是将变分不等式转化为 Wiener-Hopf 方程 [1-9]。设 H 是实 Hilbert 空间, $C\subset H$ 为非空闭凸子集, $C(H)$ 是 H 中所有非空紧子集的全体, $A_i: C\times C\to H$ 是非线性映射, $B_i: H\times H\to C(H)$ 是集值映射, $i=1,2$。寻找 $(x,y)\in C\times C$, $w_1\in B_1(x,y)$, $w_2\in B_2(x,y)$, 使得

$$\left.\begin{aligned}&\langle A_1(x,y)+w_1, u-x\rangle \geqslant 0,\quad \forall u\in C\\&\langle A_2(x,y)+w_2, v-y\rangle \geqslant 0,\quad \forall v\in C\end{aligned}\right\}\tag{1}$$

式 (1) 称为广义变分不等式组, 它的解记为 $\mathrm{SVI}(C,A_i,B_i)$。又设 $S_1,S_2: C\to C$ 是 2 个非扩张映射, 它们的不动点集的积集记为 $F(S_1)\times F(S_2)$。设 $\mathrm{SVI}(C,A_i,B_i)\cap(F(S_1)\times F(S_2))$ 非空, 本文将 Wiener-Hopf 方程技巧用于求解广义拟变分不等式组解集和非扩张映射对不动点积集的公共解问题, 是文献 [1-9] 中主要结果的整合、改进和推广。

若 $A_1=A_2=A$, $B_1=B_2=B$, 则式 (1) 化为: 找 $x\in C$, $w\in B(x)$ 使得

$$\langle A(x)+w, u-x\rangle \geqslant 0,\quad \forall u\in C\tag{2}$$

它是由 Noor[1] 引进并研究的。

1 预备知识

定义 1[5,10] 设 X 是自反 Banach 空间, $T: X\to X^*$ 是单值映射, 如果存在 2 个常数 $\alpha,\beta>0$, 使得

$$\langle Tx-Ty, x-y\rangle \geqslant (-\alpha)\|Tx-Ty\|^2+\beta\|x-y\|^2,\quad \forall x,y\in D(T)$$

其中 $D(T)$ 表示 T 的定义域, $G(T)$ 表示 T 的图, 则称 T 为 (α,β)- 松弛共强制的。

引理 1[11] 设 H 是 Hilbert 空间, C 是 H 的非空闭凸子集, P_C 表示 H 到 C 上的投影算子, 给定点 $z\in H$, 则 $\forall x\in C$ 满足不等式

$$\langle x-z, v-x\rangle \geqslant 0,\quad \forall v\in C$$

当且仅当

$$x=P_C(z)$$

引理 2[11] 由引理 1 定义的投影算子 $P_C: H\to C$ 是非扩张的, 即

$$\|P_C(u)-P_C(v)\|\leqslant\|u-v\|,\quad \forall u,v\in H$$

引理 3 (x,y,w_1,w_2) 是式 (1) 的解当且仅当 (x,y,w_1,w_2) 满足

$$\left.\begin{aligned}x&=P_C[x-\rho_1(A_1(x,y)+w_1)]\\y&=P_C[y-\rho_2(A_2(x,y)+w_2)]\end{aligned}\right\}\tag{3}$$

收稿日期: 2017-07-13
通信作者: 邱洋青 (1981–), 女, 江西赣州人, 讲师, 博士, 主要研究方向为变分不等式及相补理论。E-mail: yqqiu@sspu.edu.cn。
基金项目: 上海第二工业大学校基金 (EGD17XQD04) 资助

式中: $(x,y)\in C\times C$, $w_1\in B_1(x,y)$, $w_2\in B_2(x,y)$, P_C 是 H 到 C 上的投影算子; $\rho_1,\rho_2>0$ 是常数。

证明 由引理 1 即得。

2 Wiener-Hopf 方程技巧及迭代算法

建立 Wiener-Hopf 方程。

设 I 是 H 中的恒同映射, 令 $Q_C=I-P_C$, $S_1,S_2:C\to C$ 是非扩张映射, 寻找 $z_1,z_2,w_1,w_2\in H$, 使得 $w_1\in B_1(P_Cz_1,P_Cz_2)$, $w_2\in B_2(P_Cz_1,P_Cz_2)$ 且

$$\left.\begin{aligned}A_1(S_1P_Cz_1,S_2P_Cz_2)+w_1+\rho_1^{-1}Q_Cz_1=0\\ A_2(S_1P_Cz_1,S_2P_Cz_2)+w_2+\rho_2^{-1}Q_Cz_2=0\end{aligned}\right\}\tag{4}$$

称为广义非线性 Wiener-Hopf 方程组。

值得注意的是: 当 $B_1=B_2$, $S_1=S_2=I$ 时, 即为 Wiener-Hopf 方程 [1-3]。

定理 2 广义变分不等式组式 (1) 的解集和非扩张映射对不动点积集存在公共解 $(x,y)\in\mathrm{SVI}(C,A_i,B_i)\cap(F(S_1)\times F(S_2))$ 当且仅当广义非线性 Wiener-Hopf 方程组 (4) 有解, $(x,y)\in C\times C$, $(z_1,z_2)\in H\times H$, $w_1\in B_1(P_Cz_1,y)$, $w_2\in B_2(x,P_Cz_2)$, 且满足

$$\left.\begin{aligned}&x=S_1P_Cz_1\\ &y=S_2P_Cz_2\\ &z_1=x-\rho_1(A_1(x,y)+w_1)\\ &z_2=y-\rho_2(A_2(x,y)+w_2)\end{aligned}\right\}\tag{5}$$

式中, $\rho_1,\rho_2>0$ 是常数。

证明 (1) 必要性。若 $(x,y)\in\mathrm{SVI}(C,A_i,B_i)\cap(F(S_1)\times F(S_2))$, 则 $x=S_1x, y=S_2y$。又由引理 3 可知, (x,y) 满足式 (3)。令 $z_1=x-\rho_1(A_1(x,y)+w_1)$, $z_2=y-\rho_2(A_2(x,y)+w_2)$, 则由式 (3) 知, $x=P_Cz_1$, 又 $x=S_1x$, 可得 $x=S_1P_Cz_1$。同理, 由 $y=S_2y$ 和 $y=P_Cz_2$ 可得 $y=S_2P_Cz_2$, 从而式 (5) 成立, 且

$$z_1=P_Cz_1-\rho_1(A_1(x,y)+w_1)$$

$$z_2=P_Cz_2-\rho_2(A_2(x,y)+w_2)$$

上式就是广义 Wiener-Hopf 方程组 (4)。

(2) 充分性。由上述过程反推即得。定理证完。

利用定理 2, 构造以下迭代算法:

算法 1 设 $A_i:C\times C\to H$, $B_i:H\times H\to C(H)$, $S_1,S_2:C\to C$ 是非扩张映射对, 任意给定 $(z_0^1,z_0^2)\in H\times H$, $x_0=P_Cz_0^1$, $y_0=P_Cz_0^2$, $w_0^1\in B_1(x_0,y_0)$, $w_0^2\in B_2(x_0,y_0)$, 由以下迭代程序得到序列 $\{x_n\},\{y_n\}\{z_n^1\},\{z_n^2\},\{w_n^1\},\{w_n^2\}$:

$$x_n=S_1P_Cz_n^1\tag{6}$$

$$y_n=S_2P_Cz_n^2\tag{7}$$

$$z_{n+1}^1=x_n-\rho_1(A_1(x_n,y_n)+w_n^1)\tag{8}$$

$$z_{n+1}^2=y_n-\rho_2(A_2(x_n,y_n)+w_n^2)\tag{9}$$

$$w_n^1\in B_1(x_n,y_n),\left\|w_{n+1}^1-w_n^1\right\|\leqslant \tilde{H}(B_1(x_{n+1},y_{n+1}),B_1(x_n,y_n))\tag{10}$$

$$w_n^2\in B_2(x_n,y_n),\left\|w_{n+1}^2-w_n^2\right\|\leqslant \tilde{H}(B_2(x_{n+1},y_{n+1}),B_2(x_n,y_n))\tag{11}$$

式中, $n=0,1,\cdots$。

3 主要结果

下面求解广义变分不等式组解集和非扩张映射对不动点积集的公共逼近解。

定理 3 设 H 是实 Hilbert 空间; $C\subset H$ 为非空闭凸子集; $S_1,S_2:C\to C$ 是非扩张映射; $A_i:C\times C\to H$ 是 $(\xi_i,\eta_i)-$ Lipschitz 连续且关于第 i 变元是 (α_i,β_i)- 松弛共强制映射; $B_i:H\times H\to C(H)$ 是 $(\gamma_i,\zeta_i)-\tilde{H}-$ Lipschitz 连续映射, $i=1,2$。若

$$0<\max\Big\{\sqrt{1+2\rho_1(\alpha_1\xi_1^2-\beta_1)+\rho_1^2\xi_1^2}+\rho_1\gamma_1+\rho_2(\xi_2+\gamma_2)\sqrt{1+2\rho_2(\alpha_2\eta_2^2-\beta_2)+\rho_2^2\eta_2^2}+\rho_2\zeta_2+\rho_1(\eta_1+\zeta_1)\Big\}<1\tag{12}$$

则存在 $(x^*,y^*,w_1^*,w_2^*,z_1^*,z_2^*)$ 使得式 (5) 成立, 从而存在公共解 $(x^*,y^*)\in\mathrm{SVI}(C,A_i,B_i)\cap(F(S_1)\times F(S_2))$, 且由算法 1 生成的序列 $\{x_n\},\{y_n\},\{z_n^1\},\{z_n^2\},\{w_n^1\},\{w_n^2\}$ 分别强收敛于 $x^*,y^*,z_1^*,z_2^*,w_1^*,w_2^*$。

证明 首先, 证明存在 $z_1^*,z_2^*\in H$ 使得当 $n\to\infty$ 时, $z_n^1\to z_1^*$, $z_n^2\to z_2^*$。

由式 (8) 有

$$\left\|z_{n+1}^1-z_n^1\right\|=\big\|x_n-\rho_1(A_1(x_n,y_n)+w_n^1)-[x_{n-1}-\rho_1(A_1(x_{n-1},y_{n-1})+w_{n-1}^1)]\big\|\leqslant$$

$$\left\|x_n - x_{n-1} - \rho_1\left[A_1(x_n, y_n) - A_1(x_{n-1}, y_n)\right]\right\| + \rho_1\left[\left\|A_1(x_{n-1}, y_n) - A_1(x_{n-1}, y_{n-1})\right\| + \left\|w_n^1 - w_{n-1}^1\right\|\right] \tag{13}$$

由 A_1 关于第一变元的松弛共强制 (见定义 1) 及 Lipschitz 连续性, 有

$$\begin{aligned}&\|x_n - x_{n-1} - \rho_1[A_1(x_n, y_n) - A_1(x_{n-1}, y_n)]\|^2 = \\ &\quad \|x_n - x_{n-1}\|^2 - 2\rho_1\langle A_1(x_n, y_n) - A_1(x_{n-1}, y_n), x_n - x_{n-1}\rangle + \\ &\quad \rho_1^2\|A_1(x_n, y_n) - A_1(x_{n-1}, y_n)\|^2 \leqslant \\ &\quad \|x_n - x_{n-1}\|^2 - 2\rho_1\left[(-\alpha_1)\left\|A_1(x_n, y_n) - A_1(x_{n-1}, y_n)\right\|^2 + \beta_1\|x_n - x_{n-1}\|^2\right] + \\ &\quad \rho_1^2\xi_1^2\|x_n - x_{n-1}\|^2 \leqslant \\ &\quad \left[1 + 2\rho_1(\alpha_1\xi_1^2 - \beta_1) + \rho_1^2\xi_1^2\right]\|x_n - x_{n-1}\|^2\end{aligned} \tag{14}$$

及

$$\|A_1(x_{n-1}, y_n) - A_1(x_{n-1}, y_{n-1})\| \leqslant \eta_1\|y_n - y_{n-1}\| \tag{15}$$

由式 (10) 及 B_1 的 $\tilde{H}$-Lipschitz 连续性, 有

$$\left\|w_{n+1}^1 - w_n^1\right\| \leqslant \tilde{H}(B_1(x_{n+1}, y_{n+1}), B_1(x_n, y_n)) \leqslant \gamma_1\|x_n - x_{n-1}\| + \zeta_1\|y_n - y_{n-1}\| \tag{16}$$

由式 (13~16) 有

$$\begin{aligned}&\left\|z_{n+1}^1 - z_n^1\right\| \leqslant \\ &\quad \left[\sqrt{1 + 2\rho_1(\alpha_1\xi_1^2 - \beta_1) + \rho_1^2\xi_1^2} + \rho_1\gamma_1\right] \times \\ &\quad \|x_n - x_{n-1}\| + \rho_1(\eta_1 + \zeta_1)\|y_n - y_{n-1}\|\end{aligned} \tag{17}$$

同理有

$$\begin{aligned}&\left\|z_{n+1}^2 - z_n^2\right\| \leqslant \rho_2(\xi_2 + \gamma_2)\|x_n - x_{n-1}\| + \\ &\quad \left[\sqrt{1 + 2\rho_2(\alpha_2\eta_2^2 - \beta_2) + \rho_2^2\eta_2^2} + \rho_2\zeta_2\right] \times \\ &\quad \|y_n - y_{n-1}\|\end{aligned} \tag{18}$$

又由式 (6~7) 及引理 2 有

$$\|x_n - x_{n-1}\| = \left\|S_1P_Cz_n^1 - S_1P_Cz_{n-1}^1\right\| \leqslant \left\|P_Cz_n^1 - P_Cz_{n-1}^1\right\| \leqslant \left\|z_n^1 - z_{n-1}^1\right\| \tag{19}$$

和

$$\|y_n - y_{n-1}\| = \left\|S_2P_Cz_n^2 - S_2P_Cz_{n-1}^2\right\| \leqslant \left\|P_Cz_n^2 - P_Cz_{n-1}^2\right\| \leqslant \left\|z_n^2 - z_{n-1}^2\right\| \tag{20}$$

由式 (17~20) 有

$$\begin{aligned}&\left\|z_{n+1}^1 - z_n^1\right\| + \left\|z_{n+1}^2 - z_n^2\right\| \leqslant \\ &\quad \left[\sqrt{1 + 2\rho_1(\alpha_1\xi_1^2 - \beta_1) + \rho_1^2\xi_1^2} + \rho_1\gamma_1 + \rho_2(\xi_2 + \gamma_2)\right]\left\|z_n^1 - z_{n-1}^1\right\| + \\ &\quad \left[\sqrt{1 + 2\rho_2(\alpha_2\eta_2^2 - \beta_2) + \rho_2^2\eta_2^2} + \rho_2\zeta_2 + \rho_1(\eta_1 + \zeta_1)\right]\left\|z_n^2 - z_{n-1}^2\right\| \leqslant \\ &\quad \theta\left(\left\|z_n^1 - z_{n-1}^1\right\| + \left\|z_n^2 - z_{n-1}^2\right\|\right)\end{aligned} \tag{21}$$

式中

$$\begin{aligned}\theta = \max\Big\{&\sqrt{1 + 2\rho_1(\alpha_1\xi_1^2 - \beta_1) + \rho_1^2\xi_1^2} + \rho_1\gamma_1 + \\ &\rho_2(\xi_2 + \gamma_2)\sqrt{1 + 2\rho_2(\alpha_2\eta_2^2 - \beta_2) + \rho_2^2\eta_2^2} + \\ &\rho_2\zeta_2 + \rho_1(\eta_1 + \zeta_1)\Big\}\end{aligned}$$

由式 (12) 可知 $0 < \theta < 1$, 所以 $\{z_n^1\}, \{z_n^2\}$ 是 H 中的 Cauchy 列, 从而存在 $z_1^*, z_2^* \in H$ 使得当 $n \to \infty$ 时, $z_n^1 \to z_1^*$, $z_n^2 \to z_2^*$。

其次, 由式 (19~20) 知, $\{x_n\}, \{y_n\}$ 也是 H 中的 Cauchy 列, 从而存在 $x^*, y^* \in H$, 使得当 $n \to \infty$ 时, $x_n \to x^*, y_n \to y^*$。由式 (16) 可知, $\{w_n^1\}$ 也是 H 中的 Cauchy 列。同理, $\{w_n^2\}$ 也是 H 中的 Cauchy 列。从而存在 $w_1^*, w_2^* \in H$ 使得当 $n \to \infty$ 时, $w_n^1 \to w_1^*$, $w_n^2 \to w_2^*$。

下面证明 $w_1^* \in B_1(x^*, y^*)$, $w_2^* \in B_2(x^*, y^*)$。事实上,

$$\begin{aligned}&\mathrm{d}(w_1^*, B_1(x^*, y^*)) \leqslant \\ &\quad \left\|w_1^* - w_n^1\right\| + \mathrm{d}(w_n^1, B_1(x^*, y^*)) \leqslant \\ &\quad \left\|w_1^* - w_n^1\right\| + \tilde{H}(B_1(x_n, y_n), B_1(x^*, y^*)) \leqslant \\ &\quad \left\|w_1^* - w_n^1\right\| + \gamma_1\|x_n - x^*\| + \zeta_1\|y_n - y^*\| \to \\ &\quad 0 (n \to \infty)\end{aligned}$$

因为 $B_1(x^*, y^*)$ 是紧集, 所以 $w_1^* \in B_1(x^*, y^*)$。同理可得, $w_2^* \in B_2(x^*, y^*)$。由 P_C, A_1, A_2 的连续性及式 (6~9), 令 $n \to \infty$, 有

$$\begin{aligned}&x^* = S_1P_Cz_1^* \quad y^* = S_2P_Cz_2^* \\ &z_1^* = x^* - \rho_1(A_1(x^*, y^*) + w_1^*) \\ &z_2 = y^* - \rho_2(A_2(x^*, y^*) + w_2^*)\end{aligned}$$

即式 (5) 成立。从而由定理 2, 有 $(x^*, y^*) \in \mathrm{SVI}(C, A_i, B_i) \cap (F(S_1) \times F(S_2))$。定理证完。

注 1　定理 3 研究的是广义变分不等组解集与

非扩张映射对不动点积集的公共元问题, 是文献 [5~7] 中所研究问题的推广。具体来说, 文献 [5] 研究的是变分不等式组问题, 文献 [6~7] 研究的是一个变分不等式的解和一个非扩张映射不动点的公共元问题。

若 $A_1 = A_2 = A, B_1 = B_2 = B, S_1 = S_2 = I$, 由算法 1, 为式 (2) 构造相应的迭代算法: 设 $A : C \to H, B : H \to C(H)$, 任意给定 $z_0 \in H$, $x_0 = P_C z_0, w_0 \in B(x_0)$, 由以下迭代程序得到序列 $\{x_n\}$、$\{z_n\}$ 和 $\{w_n\}$。

$$
\begin{aligned}
&x_n = P_C z_n \\
&z_{n+1} = x_n - \rho_1(A(x_n) + w_n) \\
&w_n \in B(x_n), \quad \|w_{n+1} - w_n\| \leqslant \tilde{H}(B(x_{n+1}), B(x_n))
\end{aligned}
$$

其中 $n = 0, 1, \cdots$。

由定理 3, $\alpha_i = \eta_i = \zeta_i = 0, \xi_2 = \gamma_2 = 0$, 即有以下结论:

推论 1 设 H 是实 Hilbert 空间, $C \subset H$ 为非空闭凸子集, $A : C \to H$ 是 β- 强单调 ξ-Lipschitz 连续映射, $B : H \to C(H)$ 是 $\gamma - \tilde{H}$-Lipschitz 连续映射, 若 ρ 满足以下条件:

$$0 < \sqrt{1 - 2\rho\beta + \rho^2\xi^2} + \rho\gamma < 1$$

则存在 (x^*, w^*) 是式 (2) 的解, z^* 满足相应的 Wiener-Hopf 方程, 且由新算法生成的序列 $\{x_n\}, \{z_n\}, \{w_n\}$ 分别强收敛于 x^*, z^*, w^*。

参考文献 :

[1] NOOR M A. Some developments in general variational inequalities [J]. Applied Mathematics & Computation, 2004, 152(1): 199-277.

[2] SHI P. Equivalence of variational inequalities with Wiener-Hopf equations [J]. Proceedings of the American Mathematical Society, 1991, 111(2): 339-346.

[3] NOOR M A. Wiener-Hopf equations and variational inequalities [J]. J Optim Theory Appl, 1993, 79(1): 197-206.

[4] NOOR M A. Iterative schemes for multivalued quasi variational inclusions [J]. J Global Optim, 2001, 19(2): 141-150.

[5] QIU Y Q, LI X L. The existence of solutions for systems of generalized set-valued nonlinear quasi-variational inequalities [J]. Fixed Point Theory & Applications, 2013(1): 1-15.

[6] NOOR M A, HUANG Z Y. Wiener-Hopf equation technique for variational inequalities and nonexpansive mappings [J]. Applied Mathematics & Computation, 2007, 191(2): 504-510.

[7] QIN X L, NOOR M A. General Wiener-Hopf equation technique for nonexpansive mappings and general variational inequalities in Hilbert spaces[J]. Applied Mathematics & Computation, 2008, 201(1/2): 716-722.

[8] 闻道君, 宋树枝, 龙宪军. 非凸变分不等式和非扩张映象的 Wiener-Hopf 方法 [J]. 云南大学学报 (自然科学版), 2012, 34(1): 5-8.

[9] 王月虎, 张从军. 广义均衡问题旳算法及强收敛性 —— 基于 Wiener-Hopf 方程技巧 [J]. 数学物理学报, 2015, 35A(4): 695-709.

[10] 邱洋青, 刘理蔚, 兰丽英. 一类新的含 (A, η)- 增生算子的广义混合拟 - 似变分包含组 [J]. 应用泛函分析学报, 2011, 13(4): 375-382.

[11] 张石生. 变分不等式和相补问题理论及应用 [M]. 上海: 上海科技文献出版社, 1991.

The Wiener-Hopf Equation Technique of a System of Generalized Variational Inequalities and a Couple of Nonexpansive Mappings

QIU Yangqing

(School of Science, Shanghai Polytechnic University, Shanghai 201209, China)

Abstract: A system of generalized variational inequalities involving relaxed co-coceive mappings and a couple of nonexpansive mappings were transferred into the system of generalized Wiener-Hopf equations. A new iterative algorithm was constructed. Finally, the existence of the common solution of the system of generalized variational inequalities and the couple of nonexpansive mappings and the strong convergences of iterative sequences were proved.

Keywords: Wiener-Hopf equations technique; relaxed co-coceive mappings; iterative algorithms; nonexpansive mapping