

一类资源费用可变的平行机排序问题

窦文卿, 范 静

(上海第二工业大学理学院, 上海 201209)

摘 要: 研究了资源费用可变的排序问题起源于服务系统和某些特定的生产系统, 在这些服务系统中均存在着随着资源使用时段的不同而产生不同的费用。在资源费用可变的排序问题中, 工件具有整数加工时间, 工件在加工过程中允许中断。假定把机器的时间窗口划分为 T 个单位时间段, 在某个时间段使用机器加工工件就要付出相应的费用, 要求在给定的时间窗口内加工完所有的工件。问题的目标函数是经典排序的目标函数与所使用的总资源费用之和。对于目标函数为完工时间和与所使用的总资源费用之和的排序问题, 给出了 2 个近似算法。

关键词: 排序; 平行机; 资源费用; 可中断

中图分类号: O223

文献标志码: A

0 引言

在经典的排序模型中考虑的目标函数是 $C_{\max}$ 、 $\sum C_j$ 、 $L_{\max}$ 、 $T_{\max}$ 、 $\sum U_j$ 等。经典的排序模型不考虑资源的使用费用, 这是因为经典的排序模型均来源于生产与制造管理, 而在制造业中用于工件处理的机器设备均为固定投资, 一旦投资购买即为固定成本。然而在许多服务系统中, 均存在着随着资源使用时段的不同而产生不同的费用。把资源的使用费用集成到排序与调度模型中, 研究可变资源使用费用的排序问题, 对于提升服务系统的绩效非常重要。由于资源的使用费用随时间段的变化而变化, 故可假定把机器的时间窗口划分为 T 个单位时间段, 在某个时间段使用机器加工工件就要付出相应的费用, 要求在给定的时间窗口内加工完所有的工件。问题的目标函数就变为经典排序的目标函数与所使用的总的资源费用之和。

排序与调度模型和算法一直是运作管理、运筹学和计算机科学领域的重要研究课题。经过多年发展, 经典的排序与调度模型和算法已经非常成熟, 并得到广泛的应用, 显著增加了经济效益以及社会效益^[1-2]。近年来, 又出现了许多新型的排序与调度问题, 比如: 供应链排序、分批排序等。尽管对服务系统的运作排序与调度模型、算法和应用方面的研究

有了一定的进展, 但随着社会的进步与发展, 相关的研究工作不管是在理论还是应用方面均显不足。本文要研究的内容是如何把资源的使用费用集成到排序与调度模型中, 国内外与本文相关的文献不多, 对该类问题的研究尚属起步阶段。

从目前的文献可以看出, 对于考虑资源使用费用的排序与调度的研究大多考虑的是资源的启动费用^[3-6]。与上述研究不同, Dogan 等^[7]研究了智能电网中独立工作的排序问题, 考虑了随时间变化的资源使用费用, 其目标是满足各种服务要求。Wan 等^[8]考虑的是存在时变资源使用费用的单机排序与调度模型, 讨论了所有正则目标函数和各类不同条件下模型的计算复杂性和求解方法, 证明了资源费用结构为一般情形时, 模型是难以求解的, 并对一类重要特例 (资源费用为时间单调函数的情形) 给出了多项式或拟多项式动态规划算法, 这类模型在服务系统的运作排序与调度中具有重要意义。Zhong 等^[9]沿着这一方向, 考虑了排序的目标函数为 $C_{\max}$ 的模型, 证明了问题是难解的并对一类特例给出了多项式时间算法。Zhao 等^[10]研究了存在时变资源使用费用的 2 台机器的排序模型, 工件在加工过程中不可中断, 证明了当资源费用按照特定的模式 (包括线性递减、凹递减和凸递减) 递减时问题是可以多项式时间可解的。但是他们研究的资源使用费用

收稿日期: 2016-12-01

通信作者: 范 静 (1979-), 女, 山西长治人, 副教授, 博士, 主要研究方向为排序论。E-mail: fanjing@sspu.edu.cn。

基金项目: 上海第二工业大学青年教师培养科研项目 (201515) 资助

随时间变化的排序问题都未能考虑服务运作中的众多约束条件。在上述所有的研究中, 几乎没有考虑服务系统其他特征的模型 (例如在线处理、可中断处理过程等), 而且只有 Zhao 等^[10] 对算法进行了研究。

本文着重对目标函数为完工时间和与使用的总资源费用之和的工件可中断的平行机排序进行了分析, 并给出了 2 个近似算法。

1 问题介绍

现有 n 个工件 $\{J_1, J_2, \dots, J_n\}$ 要在 m 台机器上加工, 其中每个工件 J_j 具有整数加工时间 p_j , 工件在加工过程中允许中断; 由于资源的使用费用随时间段的变化而变化, 故可假定把机器的时间窗口划分为 T 个单位时间段, 其中第 t 个单位时间段是从时刻 $t-1$ 到 t 的时段 ($t = 1, 2, \dots, T$), π_{kt} 表示使用第 k 台机器的第 t 个单位时间段所需的资源费用 ($k = 1, 2, \dots, m, t = 1, 2, \dots, T$), 要求在给定的时间窗口内加工完所有的工件; 目标函数是经典排序的目标函数 f 与所使用的总的资源费用之和 π , 其中 f 为 $C_{\max}$ 、 $\sum C_j$ 、 $L_{\max}$ 、 $T_{\max}$ 、 $\sum U_j$ 等。令集合 S_k 表示第 k 台机器上用来加工工件的时间段 ($k = 1, 2, \dots, m$), 则总的资源使用费用 $\pi = \sum_{k=1}^m \sum_{t \in S_k} \pi_{kt}$ 。由于一个工件不可能同一时间在两台机器上加工, 故为了确保可行性, 假设 $\sum_{j=1}^n p_j \leq mT$ 且 $\max_{1 \leq j \leq n} \{p_j\} \leq T$ 。本文考虑的排序模型的目标函数为 $\sum C_j + \pi$, 用三参数法可分别表示为

$$P_m[\text{slot cost, pmtn}] \sum C_j + \pi$$

2 问题的近似算法

对于上述问题, 先分析最优解的性质, 然后寻求问题的算法。

2.1 近似算法 CS

引理 如果问题 $P_m[\text{slot cost, pmtn}] \sum C_j + \pi$ 存在最优解, 那么在其最优解中, 每台机器上的工件的加工顺序应该是服从 SPT 序的。

因此, 按照上述引理, 本文采用安排工件顺序 $\rightarrow$ 选择时间段的思想来设计算法。由于问题 $P_m[\text{pmtn}] \sum C_j$ 已经证明是多项式时间可解的, 可以用 SPT 规则求解。

SPT 规则 将加工时间最小的工件安排到最早空闲的机器上加工。

经过上述分析可提出算法 CS。

算法 CS 执行步骤如下:

(1) 先不考虑时间段费用, 利用 SPT 规则得到 $P_m[\text{slot cost, pmtn}] \sum C_j$ 的一个排序 π' , 同时计算排序 π' 中工件的最大完工时间 $C_{\max}$;

(2) 若 $C_{\max} > T$, 则此算法无解; 若 $C_{\max} \leq T$, 则跳转到步骤 3;

(3) 将时间段按照其费用的非减序排列;

(4) 对于 $C_{\max} \leq t \leq T$, 从每台机器的前 t 个时间段中选择费用最小的若干个时间段, 将工件按照第 1 步得到的排序 π' 顺序不变放到选出的时间段上加工, 并计算完工时间和 (记为 $C(t)$) 以及所使用的资源费用 $\pi(t)$;

(5) 计算 $\min_{C_{\max} \leq t \leq T} (C(t) + \pi(t))$ 的值。

定理 1 算法 CS 可在 $O(n \log n + mT^2)$ 时间内得到问题的解。

2.2 近似算法 II

所研究问题 $P_m[\text{slot cost, pmtn}] \sum C_j + \pi$ 的目标函数有两部分, 算法 CS 的设计思想是让 $\sum C_j$ 尽量小, 但是这样会导致使用的资源费用比较高。由于一个工件不可能同时安排在两台机器上加工, 故使用的资源费用比较高的原因是选择的时间段比较多, 尤其是实例中包含了某个 (或某几个) 加工时间比较大的工件时。所以, 要想降低使用的资源费用, 就必须让排序 π' 中的 $C_{\max}$ 尽可能的小, 利用该思想设计算法 II 如下。

算法 II 把算法 CS 第 1 步中对工件的预排序所依据的规则稍作改动, 先把 p_j 比较大的工件 (加工时间大于 $\frac{1}{m} \sum_{j=1}^n p_j$ 的工件) 单独安排在一个机器上, 剩余工件按照 SPT 规则安排在剩余机器上。

显然, 算法 II 与算法 CS 的时间复杂性相同。

接下来给出 $P_m[\text{slot cost, pmtn}] \sum C_j + \pi$ 问题最优值的一个下界。令 L 为 $P_m[\text{pmtn}] \sum C_j$ 的最优值, 由于问题 $P_m[\text{pmtn}] \sum C_j$ 与问题 $P_m \parallel \sum C_j$ 的最优值相等, 而问题 $P_m \parallel \sum C_j$ 可以用 SPT 规则解决。令 V 表示问题中费用最小的 LB 个时间段的费用之和, 其中 $LB = \max \left\{ \max_{1 \leq j \leq n} p_j, \frac{1}{m} \sum_{j=1}^n p_j \right\}$ 是问题 $P_m[\text{pmtn}] C_{\max}$ 的一个下界, 这是因为 $P_m[\text{pmtn}] C_{\max}$ 的最优解 $C_{\max}^*$ 不会小于任何工件的加工时间, 也不会小于各台机器的平均负荷。由上述分析, 可得问题 $P_m[\text{slot cost, pmtn}] \sum C_j + \pi(S)$ 的一个下界, 即:

定理 2 $L + V$ 是问题 $P_m|\text{slot cost, pmtn}|\sum C_j + \pi(S)$ 的一个下界。

2.3 特殊情形

从算法 CS 的设计可以看出, 工件加工时间差别越小, 算法 CS 的性能就越好。显然, 当所研究的问题为 $P_m|p_j = 1, \text{slot cost, pmtn}|\sum C_j + \pi$, 即所有工件的加工时间都为单位时间时, 算法 CS 是一个最优算法, 即:

定理 3 算法 CS 可得到问题 $P_m|p_j = 1, \text{slot cost, pmtn}|\sum C_j + \pi$ 的最优解。

3 结语

本文研究了一类考虑可变资源使用费用的工件加工过程可中断的平行机排序问题, 目标函数为 $\sum C_j + \pi$, 其中 π 是所使用的总资源费用。对于该排序问题, 本文给出了 2 个近似算法。下一步将研究目标函数 $L_{\max} + \pi$ 等的可中断的平行机排序或不可中断的排序问题的算法。

参考文献:

- [1] PINEDO M L. Scheduling: Theory, algorithms and systems [M]. 4th Edition. Berlin Heidelberg: Springer, 2012.
- [2] BLAZEWCZ J, ECKER K H, PESCH E, et al. Scheduling computers and manufacturing processes [M]. 2nd Edition. Berlin Heidelberg: Springer, 2001.
- [3] CAO D, CHEN M, WAN G H. Parallel machine selection and job scheduling to minimize machine cost and job tardiness [J]. Computers and Operations Research, 2005, 32(8): 1995-2012.
- [4] LEE I. Artificial intelligence search methods for multi-machine two-stage scheduling with due date penalty, inventory, and machining costs [J]. Computers & Operations Research, 2001, 28(9): 835-852.
- [5] LEUNG J Y T, LEE K, PINEDO M L. Bi-criteria scheduling with machine assignment costs [J]. International Journal of Production Economics, 2012, 139(1): 321-329.
- [6] PANWALKAR S S, LIMAN S D. Single operation earliness-tardiness scheduling with machine activation costs [J]. IIE Transactions, 2002, 34(5): 509-513.
- [7] DOGAN A, OZGUNER F. Scheduling independent tasks with qos requirements in grid computing with time-varying resource prices [C]//International Workshop on Grid Computing. Berlin Heidelberg: Springer, 2002: 58-69.
- [8] WAN G H, QI X T. Scheduling with variable time slot costs [J]. Naval Research Logistics, 2010, 57(2): 159-171.
- [9] ZHONG W Y, LIU X L. A single machine scheduling problem with time slot costs [M]//Recent advances in computer science and information engineering. Berlin Heidelberg: Springer, 2012: 677-681.
- [10] ZHAO Y C, QI X T, LI M M. On scheduling with non-increasing time slot cost to minimize total weighted completion time [J]. Journal of Scheduling, 2016, 19(6): 759-767.

A Class of Parallel Machine Scheduling Problem with Variable Time Slot Costs

DOU Wenqing, FAN Jing

(School of Science, Shanghai Polytechnic University, Shanghai 201209, China)

Abstract: The scheduling problem with variable time slot costs studied is originated from service system and certain production systems, in which the resource usage costs varies over time period. In the scheduling problem with variable time slot costs, an integer processing time is given for each job the jobs and preemption is allowed. Suppose that the planning horizon consists of T time slots with unit length, the corresponding cost must be paid if some time periods is taken to process jobs, and all the jobs must be processed in the given time horizon. The objective function is one traditional performance measure plus the total time slot costs. For the scheduling problem with the total completion time plus the total time slot costs, two approximation algorithms was presented.

Keywords: scheduling; parallel machine; slot costs; preemption